

KLEIN- DAGARNA

Bara knyt... (eller oknyt)!

KLEINMATERIAL

Januari 2017

SPONSORER:



SVENSKA NATIONALKOMMITTÉN
FÖR MATEMATIK

SKM
SVENSKA KOMMITTÉN FÖR
MATEMATIKUTBILDNING



INSTITUT
MITTAG-LEFFLER
THE ROYAL SWEDISH ACADEMY OF SCIENCES

FINANSIÄR:



BRUMMER & PARTNERS

KORT OM KLEINMETODEN

Denna lektion har utformats enligt Kleinmetoden, där vi har kombinerat gymnasielärares pedagogiska expertis med högskolematematikens fördjupade ämnes-kunskaper. Under Kleindagarna gör vi det genom att arbeta enligt följande modell →

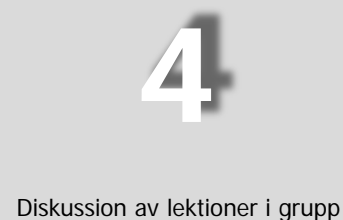
Lektionen bygger på utbildningsmodellen 5E som bygger på fem olika steg: engage, explore, explain, elaborate, evaluate.

Tanken är att en givande lektion börjar med ett inslag som engagerar eleverna, så att de blir nyfikna och vill fortsätta upptäcka ämnet genom någon form av aktivitet. Sen är det dags att förklara det som hänt. Efter detta följer en fördjupning av ämnet där eleverna får möjlighet att utmana och utveckla sina kunskaper genom ytterligare erfarenheter, för att sen gå tillbaka och utvärdera det de lärt sig.

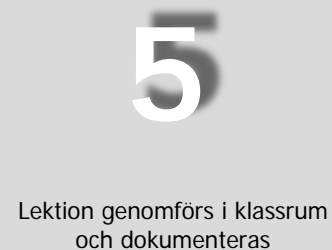
PROCESS UNDER
FÖRSTA KLEINDAGEN



SISTA
KLEINDAGEN



EFTER KLEIN-
DAGARNA



KLEINMATERIAL: Bara knyt... (eller oknyt)!

LEKTIONSTEMA:	Introduktion i knutteori
KLEINÅRET:	2017
OM MATERIALET:	Syftet med denna lektion är att bryta mönster och utvidga elevernas syn på vad matematik kan vara. Modellering och abstraktion övas genom att avbilda knutar. Det ingår också flera knutrelaterade lekar, och eleverna får experimentera med knutar och se att alla knutar inte går att knyta upp (med hjälp av färgläggningar av avbildningarna).
LEKTIONEN HAR INSPIRERATS AV:	Föreläsning om "Invarianter och Knutar" av Johan Björklund. Föreläsningen tog upp invarianter i allmänhet och mer specifikt användes 3färgningstalet som en invariant för knutar och länkar.
LEKTIONSPILOT:	Johan Björklund / Samuel Bengmark
ANSVARIG KLEINPERSON:	Samuel Bengmark
TILLSAMMANS MED:	Någon av Ulrika Tollgren (Wendesgymnasiet, Kristianstad) eller Michele Pestalozzi (Gutegymnasiet, Visby).



FÖRBEREDELSE

INNAN LEKTIONEN:

Lärare: förbereda materialet (rep, plats, kriterier,...)
Länk till inspelad provlektion alternativt Johans föreläsning.

MATERIAL:

- Reptampar eller elsladdar (ca 15st, elsladdar är extra bra då det är lätt att sätta ihop ändarna. En sladd varannan elev).
- Bibliotek med knutar / oknutar (sök på knot table wikipedia)
- 3 olika färgpennor och vitt papper (t.ex. kopieringspapper) per grupp
- För att leka knutleken behövs en öppen yta

TIDSÅTGÅNG:

1h förberedelse, 1.5h lektion, men kan

SVÅRIGHETSGRAD:

Variabel (Låg-Medel)

LÄMPLIG FÖR:

Samtliga gymnasieskolans matematikkurser

NYCKELORD:

Annorlunda matematik, knutar, topologi, invarianter.



Engage (10-15 min)

Elever skall erfara ett nytt sätt att göra matematik.

Knutleken med alla elever. Några gånger (i förhoppning att det inte går att lösa knuten minst en gång). Låt eleverna fundera på om det alltid går att lösa en sådan knut eller ej. Optimala gruppstorleken i denna övning är ungefär 20. Har man en större grupp, så är det kanske bäst att dela upp gruppen.

(Knutleken: stå i en cirkel, blunda, gå till mitten och ta två fria händer, vilka som helst. Öppna ögonen och försök att lösa knuten).

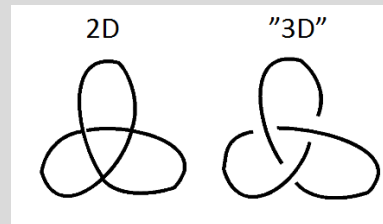


Explore (20 min)

Elever skall undersöka sätt att formalisera knutar på pappret. Det är bra om man som lärare har tränat lite själv på detta moment innan man kör lektionen.

Dela ut sladdarna till eleverna, sätt ihop till en oknut (formad som O). Eleverna skall trassla till dem litegrann och avbilda knutar på ett papper (från 3D till 2D) och fundera på vilken information behövs för att illustrera knutarna. Vilken information är viktig? (korsningarna). Hur ritas korsningar? Är det viktigt att det ser precis ut som själva sladden?. Ta ett kort av din sladd och försök återskapa bilden på pappret.

Se Exempel treklöverknut och två ihopsatta oknutar. Bild på en treklöverknut i 2D och "3D".



Visa ett par exempel på tavlan för att se till att alla diagram/avbildningar innehåller all viktig information (korsningar). Bilden ovan visar dels knutens "skugga"/projektion på planet, dels knutdiagrammet med ovan/under på korsningarna utritade. Vi vill bara ha korsningar där två delar av knuten korsas, så trippelkorsningar tillåts inte. Se till att ha fler kopieringspapper att rita på än du ha elever!

ALTERNATIV: Ge dem färdiga knutar av lite olika sorter (från tabellen). (något svårare/mer förberedelse)

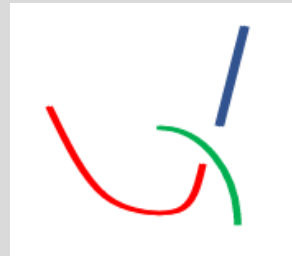
Explain 1/3 (20 min)

Varje grupp får tillgång till tre olika färger (t.ex. Grön Blå Röd).



Förklara färgläggningen: varje båge i diagrammet/avbildningen färgläggs med en färg. En båge är en sammanhängande del av diagrammet, t.ex. "från undergång till undergång".

En färgläggning är "vacker" om den uppfyller följande regel: vid en korsning med tre bågar (se nedan) skall färgerna vara antingen alla lika eller alla olika. Dvs i en korsning skall antingen representeras med tre färger eller en färg, inte två. Eleverna färglägger sina diagram/avbildningar som de avbildade innan.



BILAGOR

Explain 2/3 (20 min)

På hur många sätt kan man "vackert färglägga" knutarna? (Till lärare bara: Antalet sätt att färglägga knuten är en invariant för den knut.) Eleverna skall sedan se att olika knutar kan ha olika antal sätt att färgläggas "vackert". Två knutar med olika antal möjliga "vackra färgläggningar" är fundamentalt olika.

Den oknut som eleverna fått att arbeta med kan bara färgas enfärgat med någon av de 3 färger som eleven fått ut! Eleverna sätter därefter ihop sladdarna i formen av en treklöverknop, avbildar och provar ifall den kan färgläggas vackert på fler sätt en oknuten. Exempel oknut 3 varianter i form av 3 olika färger och treklöverknut 9 varianter med exempel antingen 3 enfärgade eller 6 varianter med 3 olika färger. (kombinatorik)



Treklöverknuten i verkligheten



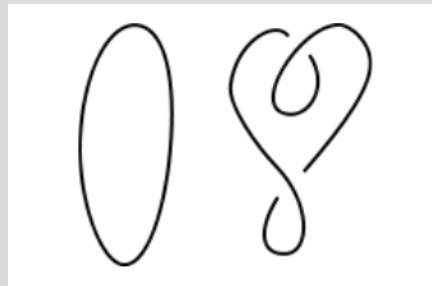
Explain 3/3 (20 min)

Fråga eleverna hur många sätt de fick fram. Om de räknat rätt (och startade med en tillkrånglad O) så är det 3 sätt, helt röd, helt grön och helt blå. (Till lärare bara: Antalet sätt att färglägga knuten är en invariant för den knut, dvs antalet sätt att färglägga knutdiagrammet vackert beror inte på hur man flyttar runt knuten eller från vilken riktning man väljer avbildning.) Förhoppningsvis får alla samma tal.

Eleverna skall sedan se att olika knutar har olika antal sätt att färgläggas "vackert". Två knutar med olika antal möjliga "vackra färgläggningar" kan inte överföras till varandra. (Till läraren, omvändningen gäller tyvärr inte, bara för att två knutar har samma antal vackra färgläggningar så måste de inte vara lika. Man kan jämföra med att två heltal är inte lika om en av dem är jämn och den andra udda, men bara för att båda är jämna så behöver de ändå inte vara lika).

Rita upp diagrammen för en oknut och treklöverknuten på tavlan (eller andra knutar som ni gjort). Gå igenom och resonera!

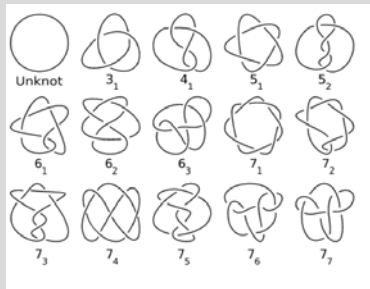
Vad är en oknut?



Elaborate (10 min)

Detta är ett aktivt forskningsområde:

- **Matematik:** Det finns matematiska grenar som räknar på denna typ av geometri där vi inte bryr oss om avstånd odyl utan låter saker röra sig fritt i rummet. Inom teoretisk matematik hör knutteroin till topologin och inom tillämpad matematik. Flera invarianter behövs för att urskilja t.ex. 4_1 och 5_1 .



- **Medicin:** Det finns också tillämpningar inom medicin, exempelvis så har Torbjörn Lundh på Chalmers jobbat med läkare för att konstruera shuntar (tuber som håller blodkärl öppna) som vävda oknutar som enkelt ska kunna tas bort genom att man drar i ett snöre och tuben löser upp sig.
- **Biologi:** Några exempel kan vara långa proteinkedjor som kan slå knut på sig och därmed få andra kemiska egenskaper jämfört med "oknutna". (Se topomeraser eller KnotProt om proteiners veckningar eller Knotted protein på Wikipedia).
- **Fysik:** Det finns även tillämpningar inom teoretisk fysik, exempelvis strängteori.

Varför trasslar alltid sladdarna? Spontana knutar: <http://www.pnas.org/content/104/42/16432.full.pdf>

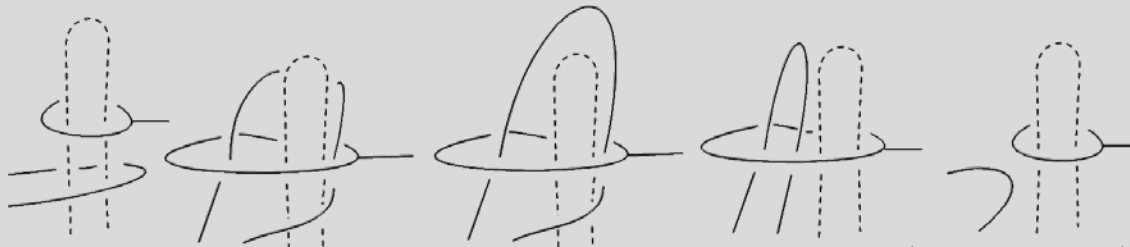


Evaluate (10 min)

- vi har upptäckt ett sätt att urskilja olika knutar från varandra (färgläggning).
- man kan räkna på geometri utan längder och vinklar (topologi).

Avslutningslek (10 min)

Avsluta med handklovespelet. Från ett snöre (per elev) tillverka ett antal handklovar (se första bilden). Bitarna som sitter runt handen (härmed kallade klovarna) ska vara rätt lösa och det ska finnas utrymme där emellan. Även snöret som förbinder klovarna får gärna vara 3-5 decimeter. Eleverna får (när de väl satt på sig handklovarna) inte föra klovarna förbi sina händer (man kan hitta på någon bakgrundshistoria om att de exploderar eller liknande om detta händer). Eleverna delas upp två och två. Innan de sätter på sig handklovarna så ser de till att länka ihop sina handklovar (dvs elev 1 tar på sig sina, elev 2 trär kloven genom cirkel som bildas av E1:s armar/kropp/handklovar, sedan tar elev 2 på sig klovarna). De ska sedan ta sig lös från varandra (en roande motivation kan vara att när de är klara får de sluta!). Se bilden på nästa sida för lösningen.



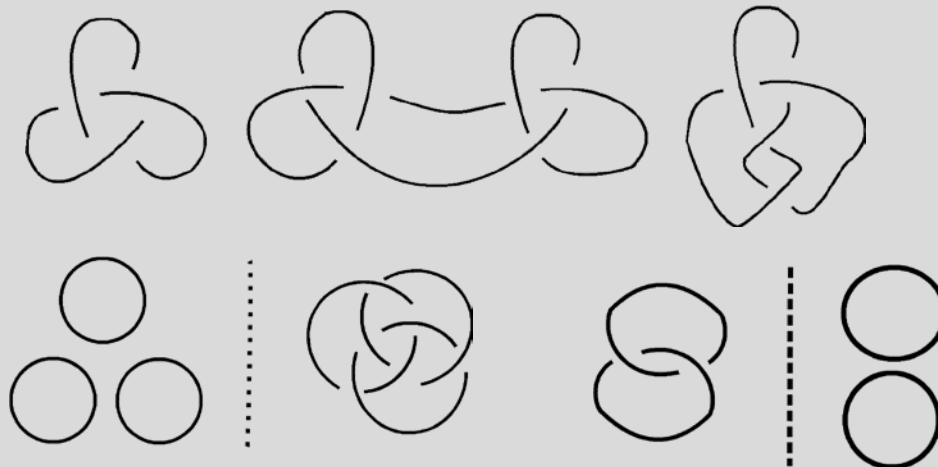
Streckade biten ska föreställa en arm. Pedagogiskt sett så kan man tänka sig att (om de kör fast) så tar man av ena kloven, då är det lätt att ta sig loss. Sedan så ser man att det är en kontinuerlig följd av "klovpositioner" från att vara runt handleden till att vara helt loss. Uppenbarligen så kan egenskapen att sitta fast inte vara något som kommer plötsligt, bara för att man flyttat sig 0.000001 millimeter, så man sitter inte fast från början. Vi provar att trä av/på från att kloven är helt fri till över handleden för att se var idén kommer ifrån. Detta kan vara rätt roande att testa på kollegorna!

Extramaterial/möjligheter:

-Det finns andra invarianter är 3-färgningstalet (det vi räknat på hittills). En av de som är lättare att förstå definitionen på är Fox n-colouring, en generalisering till n färger (se wikipedia).

-För att visa att 3-färgningstalet är en invariant så behöver vi visa att det inte ändras under de så kallade Reidemeisterdragen, varje rörelse av knuten i rummet kan delas upp i ett antal Reidemeisterdrag (se igen t.ex. wikipedia).

-Det finns både länkar (som består av flera knutar) och andra knutar som man kan studera med 3-färgningstalet, för några exempel som det är intressant att räkna med 3-färgningstalet på, se bilder nedan.



Referenser

- KnotProt (<http://knotprot.cent.uw.edu.pl/>)
- knuttabell (från Wikipedia): https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/12/Knot_table.svg
- Färgläggningen/Reidemeister drag: <https://unapologetic.wordpress.com/2007/04/18/coloring-knots-again/>
- Se denna artikel för att illustrera modern forskning / forskningsmetodiken
<http://www.pnas.org/content/104/42/16432.full.pdf>



VAD ÄR KLEIN- DAGARNA?

Kleindagarna är ett initiativ som sammanför matematiklärare från gymnasiet med professorer och högskolelärare i matematik på det världsledande Institut Mittag-Leffler i Stockholm. Syftet är att låta deltagarna inspirera och lära av varandra och att de tillsammans ska få möjlighet att utveckla framtidens matematiklektioner.

Kleindagarna har arrangerats varje år sedan 2011 och är ett gemensamt initiativ av Svenska Kommittén för Matematikundervisning (SKM), Svenska Nationalkommittén för Matematik (KVA), Institut Mittag-Leffler och finansieras av Brummer & Partners.



Skulle du vilja delta i nästa omgång av Kleindagarna?

Besök <http://skm.kva.se/>

eller [följ oss på Facebook!](#)

NÅGRA RÖSTER OM KLEINDAGARNA



Birgitta Nilsson deltog i Kleindagarna 2014 och har sen dess låtit sin undervisning inspireras av akademien.

Varför är dagarna så betydelsefulla? Kopplingen mellan forskning och gymnasiet är viktigt. Det här utbytet – det kollegiala lärandet – gav mig otroligt mycket inspiration.

Hur har Kleindagarna utvecklat dig som lärare? Professorerna på Kleindagarna hade bland annat 5E-modell för lektionsplanering som de presenterade, och som Kleinlektionerna bygger på och den har jag haft mycket nytta av. Kleindagarna erbjuder lärare den här typen av saker, att ta del av det senaste inom sin egen bransch. Det har gjort att jag idag söker efter aktuell forskning på ett helt annat sätt. Vad är det senaste inom matematiken? Det här gällde inte bara själva ämnet matematik i sig, utan också sättet att lära ut. Jag fick enorm energi av att delta och kom hem med massor av nya idéer och inspiration.

Torbjörn Jansson, mattelärare på Tullängsgymnasiet i Örebro som deltog i Kleindagarna 2011.

Vad är Kleindagarna för dig? Kleindagarna var ett tillfälle att samlar både lärare från gymnasiet och universitet för att mötas och tillsammans hjälpas åt att ta fram framtidens matematikundervisning. Kleindagarna gav en chans att träffa likasinnade under flera dagar och det finns en styrka i att det sker i så litet format. När jag deltog var vi drygt 30 personer totalt, vilket gjorde det lätt att lära känna varandra,

Hur har Kleindagarna utvecklat dig som lärare? Att träffa andra som tänker i samma banor gav extra motivation. Dessutom har de lektioner som vi tillsammans tog fram varit till stor nytta i klassrummet. De är ämnade att fungera som introduktionslektioner när man introducerar en ny del av matematiken. Tanken är att de ska inspirera och engagera eleverna. För mig har det fungerat väldigt bra.



Monica Göransson Löof är gymnasielärare i matematik och företagsekonomi på Hjalmar Strömerskolan i Strömsund. Monica deltog i Kleindagarna 2014.

Vad är Kleindagarna för dig? På Kleindagarna får man dels lära sig något nytt kunskapsmässigt, dels erbjuds metoder för lektionsupplägg. Man gav alltså både idéer för fylla undervisningen med, men också för hur man undervisar. Sedan några år har man ju via GY11 (gymnasiereform) lagt till att man ska träna eleverna på moment som problemlösning, modellering och så vidare. Kleindagarna gav mig många bra idéer på hur jag skulle kunna göra det rent praktiskt.

Under Kleindagarna möts lärare från gymnasiet respektive akademien – vad har ni lärt er av varandra? Kleindagarna erbjuder en bra glimt av varandras världar. Det ger i sin tur inspiration och näring. Sedan plockar man helt enkelt ut det som går att arbeta med i en gymnasieklass. När vi åt frukost, lunch och middag tillsammans så var vi ju en salig blandning människor. Vi var till att börja med lärare från många olika skolor. Sedan satt ju ofta även professorerna och doktoranderna med, och jag fick en känsla av att alla hade något slags utbyte med varandra.



KAN DU INTE KOMMA TILL KLEINDAGARNA?

Låt Kleindagarna komma till dig genom
att arrangera dina egna Kleindagar!

Är du intresserad av att arrangera lokala Kleindagar där du bor?

Gör så här:

- Samla mattelärare från gymnasieskolor i din omgivning och boka en lämplig lokal – Tre dagar är önskvärt, men även kortare Kleindagar kan anordnas.
- Kontakta kleindagarna@gmail.com så sätter vi dig i kontakt med företrädare för akademien och kan bistå med råd och tips inför dagarna.
- Tidigare års Kleinmaterial finns att tillgå på skm.kva.se. Skicka gärna denna länk till de personer som ska delta så att de kan skapa sig en förståelse för hur Kleindagarna går till. Under konferensen kan ni använda dessa mallar för att sammanställa det lektionsmaterial som ni arbetat fram och skicka det till ovan mailadress – på detta sätt ser vi till att fler





GILLADE DU DET HÄR MATERIALET?

På [Kleindagarnas hemsida](#) hittar du fler Kleinmaterial.

Nya lektionsmaterial läggs upp löpande allt eftersom de färdigställs.

Har du gjort ett eget material som du tror att andra hade haft nytta av?

Maila kleindagarna@gmail.com så ser vi till att andra Klein-vänner också kan få tillgång till det via hemsidan!

