Lektion isoperimetrisk optimering

Lektionens namn: Isoperimetrisk optimering
Kurs: Ma2a, Ma2b, Ma2c
Längd: **85** min

Inledning

Lektionen behandlar ett klassiskt maximeringsproblem (Euklides och Zenodorus): det isoperimetriska problemet ”~~*Av alla rektanglar med given area, hitta den som har minst omkrets*~~ *Av alla rektanglar med given omkrets, hitta den som har störst area*”. Ett syfte med lektionen är att eleverna får komma i kontakt med de matematiska begreppen Aritmetiskt medelvärde, Geometriskt medelvärde, Olikheter, Omkrets = Perimeter, Iso-, Matematiskt bevis, Isoperimetriska problem, Optimering, Matematikens historia, Maximeringsproblem m.m. Ett annat syfte är att eleverna ska få arbeta med olika problemlösningsstrategier och olika representationsformer såsom att pröva sig fram, att diskutera logiskt, använda algebra, geometriska former och tabeller. Slutligen är ett viktigt syfte att eleverna ska få komma i kontakt med historiska matematiska problem.

Lektionen är skapad enligt 5E-modell, och vi börjar med ”Engage”:

1. Engage - Berättelsen om Didos problem

Läraren berättar ”sagan” om Dido. Med tillhörande bilder och rekvisita, inklusive sönderklippande av oxhud (eller lämplig tygbit…) Läraren ger lösningen till Didos problem.

Läraren för en diskussion som syftar till insikten att *olika stora områden kan inringas med en given snörlängd.*

Den naturliga följdfrågan blir: Hur stora areor kan man bilda med en given snörlängd samt, vilken är den optimala geometriska formen?

Här kommer vidare en … pedagogisk utmaning: Att införa det duala problemet: hur liten snörlängd kan man som minst behöva för att inringa en given area?

Sedan introducerar vi problemet vi ska lösa idag: ~~*Vilken är den optimala geometriska formen för att maximera arean på en fyrhörning då omkretsen är given?*~~ *Vilken rektangel med given omkrets har maximal area?*

2. Explore

Eleverna får använda olika långa snören för att inringa en given area ~~*och/eller* eleverna får använda snören av givna längder för att inringa olika stora areor~~.

Fråga: Vilken geometrisk form ger störst area? (Cirkeln)
Efter lektionen i Mora inser vi att denna fråga istället bör användas för att avsluta hela lektionen och liksom knyta ihop säcken. Eleverna använde mycket tid till att beräkna cirkelns radie, som ju inte var tänkt som svar på frågan. Det vi vill med lektionen är att de i första hand ska räkna på rektanglar.

Fråga Vilket förhållande gäller mellan sidorna i en ~~fyrhörning~~ rektangel då arean är maximal? Utföres med snören. Stencil 1 med tabell och instruktioner.

Fråga: Hur skapar man en kvadrat med samma area som en rektangel?
Stencil 2 med tabell och instruktioner.
Frågan handlar alltså om det duala problemet. Här är det bra med en visuell förklaring vad som menas med att skapa/rita en kvadrat. Problemet brukar också sägas handla om ”rektangelns kvadratur”. Konstruktion med passare och linjal beskrivs i Euklides Elementa.

Eleverna får här ett papper med olika rektanglar och får skapa kvadrater med samma area som rektangeln.

Avslutande fråga: Kan ni formulera ett algebraiskt uttryck för kvadratens sida uttryckt i rektangelns sidor (i ord, med algebra m.m.).
Det behövs ett förtydligande att de ska finna två samband, ett som baseras på kvadraturproblemet och ett på isoperimetriska problemet. Alla grupper i Mora kom fram till $\sqrt{ab}$ men samtliga behövde få hjälp att komma igång med $\frac{a+b}{2}$.

3. Explain

Läraren för en diskussion med klassen kring vilka slutsatser grupperna dragit. Olika uttryck för kvadratens sida redovisas på tavlan (exempelvis muntliga förklaringar, olika algebraiska modeller). *Anm: Här är det ju viktigt att vi följer upp hela exploredelen och inte bara den sista frågan (även om den är viktigast)).*

Läraren plockar upp klassens slutsatser och sammanfattar dessa och styr in diskussionen mot begreppet *medelvärde*. Fråga: *Kan man se kvadratens sida som något slags medelvärde av rektanglarnas sidor?*

Tillsammans kommer vi fram till att det finns flera sorters medelvärden. Nu får eleverna undersöka det aritmetiska och det geometriska medelvärdet (genom att testa med olika tal).

I denna uppgift konstruerar eleverna en tabell (eller också ger vi eleverna ett papper med denna tabell), typ:

x	y	$\bar{x}_A = \frac{x+y}{2}$	$\bar{x}_G = \sqrt{xy}$	*Slutsats*

Fråga att ställa till eleverna: Kan ni formulera era slutsatser med ord samt algebraiskt?

Läraren sammanfattar gruppernas slutsatser. ($\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$)

Återkoppla till ursprungsproblemet (vi måste ju motivera, vad ska vi ha detta till?): *~~Vilken är den optimala geometriska formen för maximal area hos en fyrhörning med given omkrets?~~ Vilken rektangel med given omkrets har maximal area?*
Med fördel kan diskussionen även överföras till andra fyrhörningar som (enklast) parallellogrammer.

Läraren introducerar A-G-olikheten som ett ***bra matematiskt verktyg*** för att lösa problemet.

Nu angriper vi ursprungsproblemet! Läraren ritar en rektangel med sidorna x,y och lyfter fram att $O = P = 2(x+y)$ samt $A = xy$. (Här är det ju också viktigt att vi har AG kvar på tavlan). Läraren ber eleverna att jämföra A-G-olikheten med uttrycken för perimeter och area. Vi kommer gemensamt fram till att hos vår rektangel gäller olikheten $P \geq 4\sqrt{A}$. ~~Tillsammans utreder vi sambandet mellan A-G-olikheten och P-A. Härledning med kvadreringsregeln.~~

4. Explore

I Mora genomfördes denna del i 3. Explain

Vi tror att det inte är elementärt för eleverna att tolka detta uttryck. Men, det är bra träning! Därför ber vi eleverna att i grupper (två och två?) formulera uttrycket i ord. Här kan vi hjälpa eleverna genom att ställa frågan: *Om vi har en fyrhörning med given (fix) area, mellan vilka värden kan omkretsen för denna fyrhörning då variera?* Det viktiga att formulera i ord här är: att omkretsen inte kan bli hur liten som helst. Det finns en minsta gräns! Den gränsen är då $P = 4\sqrt{A}$.

5. Explain

I Mora genomfördes denna del i 3. Explain

Ok, vi är nu framme vid sista frågan, crescendot!: *För vilka fyrhörningar gäller, att* $P = 4\sqrt{A}$. Jo, vi ser i elevernas tabeller att $P = 4\sqrt{A}$ **då** $\boldsymbol{x = y}$. Bevis kan göras med kvadreringsregeln i olikheten $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$. Beviset kan sägas vara svårt.

Anm: Vi kan strunta i att bevisa A-G-olikheten algebraiskt (kvadreringsregeln). Vi nöjer oss då med att ta stöd i tabellen. Vi återkommer till detta då vi arbetar med kvadreringsregeln, alternativ ger detta som elaborate.
OBS: Försök att tydliggöra kopplingen att våra aritmetiska slutsatser är ekvivalenta med motsvarande geometriska Detta är nog svårt…

6. Evaluate

Läraren tillsammans med eleverna: Vi har kommit fram till, genom att använda den aritmetiska – geometriska olikheten, att *kvadraten* är den optimala geometriska formen för att inringa en given area med minimal perimeter. Vi har utvecklat en insikt i att det finns relevans för olika sorters medelvärden och vi har upptäckt en relation mellan det aritmetiska och det geometriska medelvärdet. Vi har även använt denna relation till att lösa ett matematiskt problem.

Lyft fram kvadreringsregeln
Om beviset av A-G-olikheten har genomförts.

Frågan om vilken geometrisk form med given omkrets som ger störst area (cirkeln) kan här tas upp om det inte har gjorts tidigare.

7. Ellaborate

I Mora fanns ingen tid kvar till denna punkt under just denna lektion.

Vad finns i horisonten? Hur kan den matematik vi använt generaliseras? På vilka sätt kan vi fortsätta att arbeta med denna matematik? Jo, eleverna kan exempelvis försöka bevisa/komma fram till A-G-olikheten algebraiskt. Om det inte har gjorts i 5. Explain. Eleverna kan försöka formulera A-G-olikheten i 3 dimensioner (algebraiskt samt att tolka det algebraiska uttrycket/sambandet). Väldigt givande vore det om vi kunde ge eleverna ett annat, liknande, optimeringsproblem där man kan använda olikheten på samma sätt. Exempelvis, av alla cylindrar med given volym, vilken har minst begränsningsarea? Vidare, vi har nu undersökt och använt det aritmetiska och det geometriska medelvärdet. Kan man tänka sig fler sorters medelvärden? När skulle de vara lämpliga?

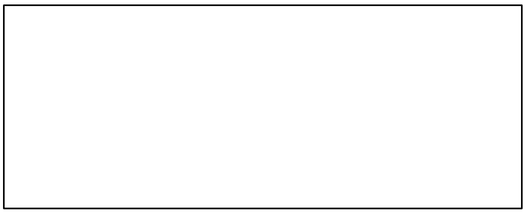
Kortversion av planeringen i Mora (Leif Sandström)

1. Engage (10 min) med Didos problem
2. Explore (40 min)
   a. Snören, maximal area på rektangel, stencil med tabell
   b. Samma area på kvadrat som rektangel, stencil med tabell
   c. Förhållande mellan sidorna, tabell
3. Explain (30 min) med tabell visa på $\bar{x}_A$ och $\bar{x}_G$ och att $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$. Visa på kvadreringsregeln och att $2x+2y \geq 4\sqrt{xy}, P \geq 4\sqrt{A}$. Likhet om x=y.
4. Evaluate (10 min) kvadraten ger max area resp min omkrets. A-G-olikheten får bli min knorr men den är lite lurig att få med.

GRUPPUPPGIFTER ”Didos problem”, stencil 1

Ni har ett snöre som är 60 cm långt. Använd det och undersök vilka areor på rektanglar ni kan få med hjälp av det. Vilken längd ska sidorna ha för att ni ska få största möjliga area?
Sammanställ alla data i en tabell och försök att hitta sambandet mellan kvadraternas och rektanglarnas sidor.

	Rektanglar				
	bas	**höjd**	**Area**	**Omkrets**	**Samband**
a					
b					
c					
d					
e					
f					
g					
h					
i					
j					
k					



höjd

bas

Commented [LS1]: Den här stencilen skrev jag ihop för att strukturera upp elevernas laborerande med snöret. På de hela taget var den användbar. En viktig insikt som vi fick var att jag som lärare bör nämna att kvadraten är en rektangel. Det fungerade bra även om Staffan, jag och mina kollegor informerade eleverna om detta när de arbetade.

Commented [LS2]: De grupper som var klara först började leka med snörena och forma figurer. Då blev längden på snörena ett problem, det räckte inte till att göra ex Eiffeltornet. Nu hade jag avpassat snörena till mina 30 cm-linjaler. Har du längre linjaler kan du ha längre snöre. 50 cm-linjal räcker till ett 1 m långt snöre.

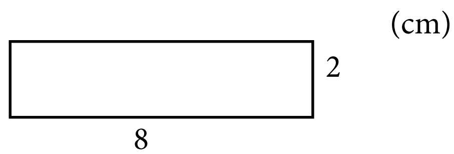
Commented [LS3]: Frågorna flyttas längst ned på stencilen. Formuleringen om samband mellan kvadratens och rektangelns sidor stryks. Kvadrater har ej nämnts ännu.

Commented [LS4]: Denna kolumn var lite förvirrande och onödig. Den kan strykas. Som du ser är detta en redigerad kopia av den andra stencilen.

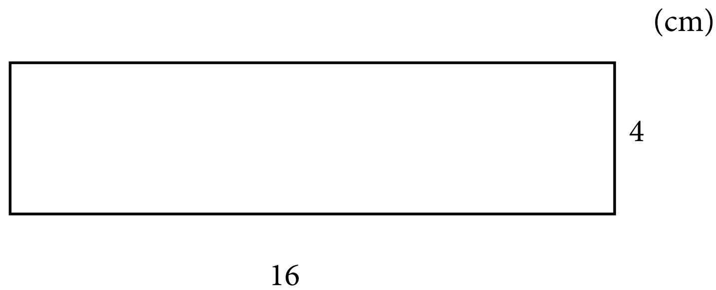
GRUPPUPPGIFTER ”Didos problem”, stencil 2

Vilka sidor har kvadrater som har samma areor som följande rektanglar?

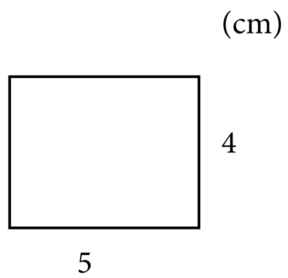
a.



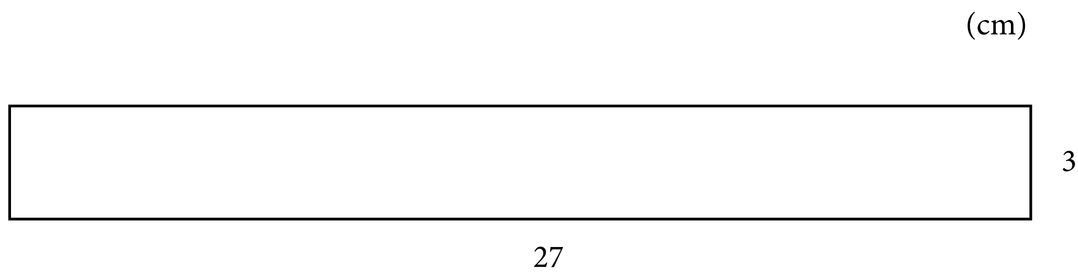
b.



c.



d.



Sammanställ alla data i en tabell och försök att hitta sambandet mellan kvadraternas och rektanglarnas sidor.

	Rektanglar				
	bas	**höjd**	**Area**	**Kvadratens sida**	**Samband**

a					
b					
c					
d					