

Benfords lag

Lektion i Matte 2

16 juni 2014

Engage (10 min)

Dela in klassen i 5-6 grupper och dela ut fem bokföringar, varav en har falska siffror. Låt grupperna på egen hand försöka avgöra vilken bokföring som är felaktig.

Explore (20 min)

Därefter ger man dem uppgiften att ta fram första signifikanta siffran av alla siffror i dokumenten, lägga in dem i ett program (exempelvis Excel eller Geogebra), ta fram diagram och sedan därefter gissa igen utifrån det mönster som ses.

Explain (20-30 min)

Skriv upp formeln $B(k) = \log_{10}(1 + \frac{1}{k})$ och förklara att asymptotiska (d.v.s när mängden data går mot oändligheten) fördelningar följer Benfords lag om de uppfyller dessa fyra principer (se[Tao09]):

1. Antar positiva värden.
2. Antar värden av flera storleksordningar, d.v.s. spänner över många olika skalor (tiopotenser).
3. Uppkommer av en komplicerad kombination av mestadels oberoende faktorer.
4. Har inga väsentliga avrundningar.

Dessa fyra principer kapslar in det som framför allt kännetecknar Benfords lag, nämligen *skalinvariansen*.

Det bör betonas att Benfords lag är *empirisk* och inte rigoröst bevisad, även om det finns en del förklaringar, se [Few09, GD08]. Lättaste sättet att förklara Benfords lag är via exempel som att byta kurs från kronor till dollar i uppgiften ovan. Andra exempel där Benfords lag är tillämpbar:

- Populationsmängd.

- Fysikaliska konstanter.
- Konsumentprisindex (KPI), d.v.s. prisutvecklingen för den privata konsumtionen.
- 2-potenser
- Flodlängder

Exempel där Benfords lag inte är tillämpbar:

- Likformig fördelning av tal mellan 0 och 10^{10} .
- Människors längd.

Det kan även vara bra att återkoppla till normalfördelningen.

Elaborate (om tid finns över)

Som räkneuppgift kan man be eleverna att visa att

$$B(1) = B(2) + B(3),$$

$$B(2) = B(4) + B(5),$$

och även be dem bestämma hur $B(3)$ kan skrivas om och bevisa detta.

Elaborate (hemuppgift)

Som hemuppgift kan man ge eleverna att hitta siffror från valfri källa som möjligen uppfyller Benfords lag, stoppa in i excelarket (<http://investexcel.net/wp-content/uploads/2012/10/Benfords-Law.zip>) och därefter maila till läraren, varpå läraren kan välja ut några stycken, presentera vid nästa lektions-tillfälle och förklara varför dessa uppfyller eller inte uppfyller Benfords lag.

Referenser

- [Few09] R. M. Fewster, *A simple explanation of Benford's law*, Amer. Statist. **63** (2009), no. 1, 26–32. MR 2655700
- [GD08] Nicolas Gauvrit and Jean-Paul Delahaye, *Pourquoi la loi de Benford n'est pas mystérieuse*, Math. Sci. Hum. Math. Soc. Sci. **182** (2008), no. 2, 7–15. MR 2433183 (2009f:62008)
- [Tao09] Terence Tao, *Benford's law, Zipf's law, and the Pareto distribution*, July 2009, <http://terrytao.wordpress.com/2009/07/03/benfords-law-zipfs-law-and-the-pareto-distribution/>.