Kleindagarna, IML, Stockholm, 17 – 19 juni 2011
Geometri

Linjer och cirklar som skär varandra - eller inte

Jana Madjarova, MV, Chalmers/GU

Det "normala" är att två linjer i planet skär varandra. Men, när går tre linjer genom en punkt? Eller tre cirklar? Eller två cirklar och en linje? Vi ska titta på några exempel som är kopplade till triangeln och ge förslag på riktningar man kan följa om man vill gå vidare.

Alltså, givet är en godtycklig triangel.

Definition 1. *Median* kallas en sträcka som sammanbinder ett av triangelns hörn med motstående sidas mittpunkt.

Definition 2. *Mittpunktsnormal* till en sträcka kallas den räta linjen som går genom sträckans mittpunkt och är vinkelrät mot sträckan.

Definition 3. *Bisektris* till en vinkel kallas den räta linjen som går genom vinkelns spets och delar den i två lika stora vinklar.

Definition 4. *Höjd* kallas en sträcka som går från ett av triangelns hörn till linjen som innehåller den motstående sidan och som är vinkelrät mot den linjen.

Mittpunktsnormalen till en sträcka består av alla punkter som befinner sig på lika avstånd från sträckans båda ändpunkter.

Bisektrisen till en vinkel består av alla punkter som befinner sig på lika avstånd till vinkelns båda axlar.

Sats 1. De tre medianerna i en triangel skär varandra i en punkt.

Bevis. Låt ABC vara en triangel, och beteckna med A_1, B_1 resp. C_1 mittpunkterna på sidorna BC, CA resp. AB. Trianglarna ABC och C_1BA_1 är likformiga (sida-vinkel-sida). Sträckan A_1C_1 är parallell med AC (enligt omvändningen till topp-triangelsatsen), och hälften så lång, eftersom $A_1C_1 : CA = BA_1 : BC = 1 : 2$. (Alternativt kan man använda omvändningen till transversalsatsen.) Beteckna med T punkten i vilken medianerna AA_1 och CC_1 skär varandra. Trianglarna ATC och A_1TC_1 är nu likformiga, enligt topptriangelsatsen, och $AT : A_1T = CT : C_1 : T = AC : A_1C_1 = 2 : 1$. Det innebär att punkten T delar var och en av de två medianerna i förhållande $2 : 1$, räknat från hörnet. Det följer att T även ligger på den tredje medianen (varför?).

De tre medianernas skärningspunkt T kallas för *triangelns tyngdpunkt.*

SATS 2. De tre mittpunktsnormalerna till sidorna i en triangel skär varandra i en punkt.

BEVIS. Beteckna med O punkten i vilken mittpunktsnormalerna till AB och BC skär varandra. Det följer att $OA = OB$, och $OB = OC$. Då gäller att $OA = OC$, d.v.s. O ligger även på mittpunktsnormalen till sidan CA.

De tre mittpunktsnormalernas skärningspunkt O befinner sig alltså på lika avstånd från triangelns tre hörn. Den är därmed medelpunkt för triangelns *omskrivna cirkel*, d.v.s. den cirkel som går genom triangelns tre hörn. (I beviset ovan har vi visat att en sådan cirkel existerar.)

SATS 3. De tre bisektriserna till vinklarna i en triangel skär varandra i en punkt.

BEVIS. Analogt med föregående. Skärningspunkten I befinner sig på lika avstånd till triangelns tre sidor, och är medelpunkt för den *inskrivna cirkeln*, d.v.s. den cirkel som tangerar triangelns alla tre sidor.

SATS 4. De tre höjderna i en triangel skär varandra i en punkt.

BEVIS. Dra linjer genom vart och ett av triangelns tre hörn, parallellt med motstående sida. Dessa linjer skär varandra i tre punkter som är hörn till en triangel som är likformig med den givna, och som har dubbelt så långa sidor. Höjderna i den ursprungliga triangeln är mittpunktsnormaler i den nya. Därmed skär de varandra i en punkt.

Den spännande fortsättningen!

(1) *(Lätt)* Hur ser bilden ut för olika typer av trianglar - spetsig? rätvinklig? trubbig? likbent? liksidig?

(2) *(Medelsvår)* Vad kan du säga om sträckorna från ett av triangelns hörn till de båda punkter i vilka den inskrivna cirkeln tangerar sidorna från det hörnet?

(3) *(Medelsvår)* Är alla fyrhörningar in- resp. omskrivna?

(4) *(Svår)* Kan du karakterisera alla in- resp. omskrivna fyrhörningar?

(5) *(Medelsvårt)* Vidskrivna cirklar.

(6) *(Medelsvårt)* Formler för triangelns area som involverar den inskrivna och de vidskrivna cirklarnas radier och triangelns halvperimeter.

(7) *(Medelsvårt - svårt)* Visa att linjen en bisektris ligger på och mittpunktsnormalen till den motstående sidan skär varandra på den omskrivna cirkeln. Skärningspunkten (som man ibland refererar till som "superpunkten") förekommer i många intressanta problem.

(8) *(Avancerat)* Givet tre punkter på var sin sida av triangeln (ej hörn), när kommer sträckorna från hörnen till de givna punkterna på respektive motstående sida att skära varandra i en punkt? Menelaos och Cevas satser. (Bisektrissatsen är bra att kunna.)

(9) *(Avancerat)* Givet tre punkter på var sin sida av triangeln (ej hörn), när kommer normalerna till respektive sida i dessa punkter att skära varandra i en punkt? Carnots sats.

(10) *(Avancerat)* I bevisen ovan, hur vet man att *två* av de involverade sträckorna/linjerna skär varandra? (De behöver inte göra det i icke-euklidisk geometri.)

ANALOGI (likhet, överensstämmelse): Triangelns motsvarighet i rymdgeometrin är *tetraedern*, en pyramid med fyra hörn, fyra sidor och sex kanter. Många (men inte alla!) av triangelns egenskaper är sanna även för tetraedern, förutsatt att man "översätter" begreppen rätt. Vad är motsvarigheterna till medianer, bisektriser, höjder etc för en tetraeder? Vilka av (de omformulerade) satserna 1–4 är sanna för en tetraeder? Vilken tetraeder skulle man kunna kalla "rätvinklig"? Vad skulle motsvarigheten till Pythagoras sats vara för en sådan tetraeder?

Vilket / vilka av bevisen nedan behöver kompletteras, och hur?

Problem. Givet är en spetsig triangel. På två av dess sidor ritas cirklar med dessa sidor som diametrar. Visa att de två cirklarnas (andra) skärningspunkt ligger på triangelns tredje sida.

Bevis 1. Antag att cirklarnas diametrar är sidorna BC och CA. Låt P vara de två cirklarnas (andra) skärningspunkt. Av randvinkelsatsen följer att $\angle APC = \angle BPC = 90°$, vilket ger att $\angle APB = 180°$, d.v.s. P ligger på sidan AB.

Bevis 2. Antag att cirklarnas diametrar är sidorna BC och CA. Låt P vara punkten i vilken en av cirklarna, säg den med diameter CA, skär sidan AB. Enligt randvinkelsatsen är då $\angle APC$ rät. Det följer att $\angle BPC$ också är rät, vilket betyder att P måste ligga på den andra cirkeln också.

Bevis 3. Antag att cirklarnas diametrar är sidorna BC och CA. Låt P vara fotpunkten till höjden från C (d.v.s. $P \in AB$). Då är vinklarna $\angle APC$ och $\angle BPC$ räta, vilket innebär att P måste ligga på båda cirklarna.

Fråga. Vad händer om triangeln inte är spetsig?

Rymdproblem. En tetraeder är sådan att om man klipper upp den längs kanterna som utgår från ett av dess hörn och viker ner sidorna, så får man en kvadrat med sidlängd a. Beräkna tetraederns volym.