Ramsey tal

Detta är en lektion utvecklad under Kleindagarna 2011, vidareutvecklad och testad i klassrum av

Samuel Bengmark, Matematiska vetenskaper, Chalmers och Göteborgs universitet

Elisabeth Samuelsson, Porthälla gymnasieskola

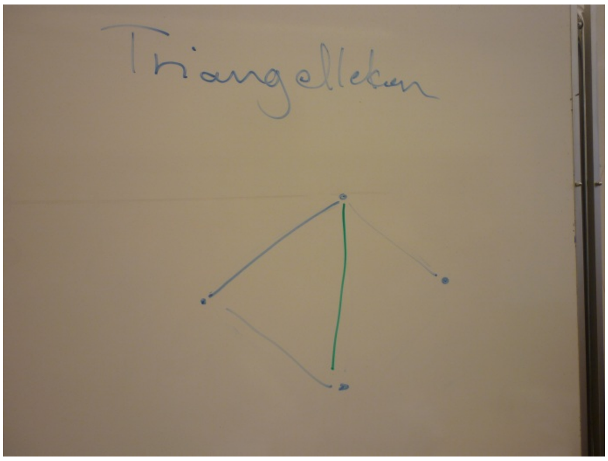
Målgrupp

Matematik 5, som del i centralt innehåll

- Begreppen permutation och kombination.
- Metoder för beräkning av antalet kombinationer och permutationer samt motivering av metodernas giltighet.
- Begreppet graf, olika typer av grafer och dess egenskaper samt några kända grafteoretiska problem.

Engage (5 minuter)

Under denna lektion spelar vi ett spel som vi kan kalla för triangelspelet. I spelet färgar man kanter i grafer. Rita upp fyra noder (hörn) på tavlan och fyll sedan i några färgade kanter (bågar).



Förklara att man skall fortsätta så till grafen är komplett, dvs att alla par av noder bundits samman med exakt en färgad kant. Spelet går ut på att försöka fylla i alla kanter utan att få en enfärgad triangel.

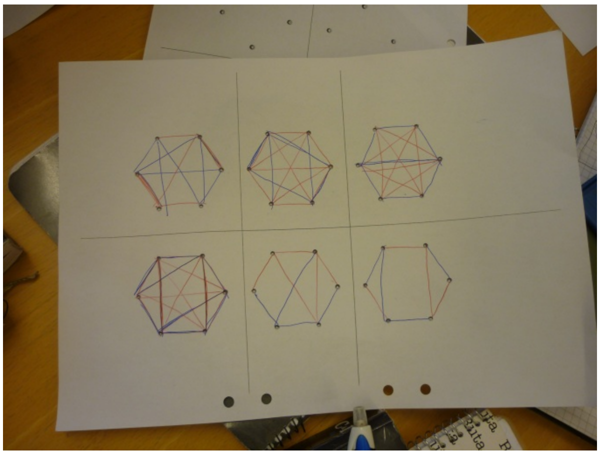
Var noga med att betona att endast trianglar som har sina hörn i noderna räknas, dvs att kanter som skär varandra inte delar in området i mindre trianglar. (Att använda ordet triangel är en förenkling som fungerar så länge man ritar raka kanter, men egentligen är det enfärgade komplett graf med tre noder som menas.)

Explore (25 minuter)

Dela in studenterna i grupper om två. Ge varje grupp ett papper med några regelbunden 4-hörning utan kanter (se sida 5). Ge dem två pennor med olika färg, säg en blå och en röd penna. Med pennorna skall de fylla i kanter, dvs sammanbinda alla par av noderna med enfärgade kanter. Kan de fullborda grafen och fylla i alla 6 kanter utan att det bildas en enfärgad triangel. Kan de göra det så har klarat uppgiften.

De som klarat detta kan gå över till grafer med 5 noder. Ge dem då ett papper med regelbundna 5-hörningar utan kanter (se sida 6). Be dem nu på samma sätt försöka fylla i alla kanter utan att det bildas en enfärgad triangel. Kan det göra det så har de klarat uppgiften.

Då är det dags för regelbundna 6-hörningar utan kanter (se sida 7). Ge studenterna 20 minuter att försöka hitta ett sätta att vinna på denna nivå. Det kommer inte vara möjligt. Eftersom det nu är 15 kanter som skall fyllas i är det därför inte uppenbart att det inte går.



Explain (10 minuter)

Börja med att låta studenterna presentera sina resultat. Klarade alla av 4- och 5-hörningarna? Hur gick det med 6-hörningen? Om någon ansåg sig klara det låt dem presentera sin lösning och hjälp tillsammans åt att identifiera var de tänkt fel.

Gör en liten undersökning i klassrummet och fråga hur många som tror att det går att hitta en lösning även på nivå 6, dvs en tvåfärgning utan en enfärgad triangel, men avslöja inte ännu att det inte finns någon lösning. Diskutera istället vad som krävs för att reda ut vad som gäller. Ett handfast alternativ är att kolla alla möjliga 2-tvåfärgningar och se om det dyker upp någon lösning eller inte. Skulle vi klara av det tillsammans? Hur många fall skulle behöva kontrolleras?

Börja med att be eleverna reda ut hur många kanter som skall färgas i en komplett graf med 6 noder. Jo $\binom{6}{2} = 15$. Be dem sedan reda ut hur många olika färgningar det då finns. Jo, 2^{15}=32Men det skulle kunna ta tid och kräver mycket systematiskt tillvägagångsätt då 15 kanter ger att det finns 2^15, dvs drygt 32768 stycken olika färgningar (om man bortser från symmetri). Hur lång tid skull det ta att genomföra? Skulle vi klara av att vara systematiska nog för att inte missa eller dubblera någon färgning?

Låt oss därför börja med att titta på en punkt i grafen. Kalla den A och rita upp den på tavlan. Rita nu upp hur A sammanbinds med de andra 5 punkterna med 5 kanter. Hur många av dessa kanter måste ha samma färg? Eftersom vi bara har två färger måste minst tre av dessa fem kanter ha samma färg. Låt oss säga att färgen är blå och att dessa tre kanter sammanbinder A med punkterna B, C och D. Rita upp detta på tavlan

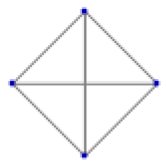
Be nu studenterna fundera på vilka färger som kanterna som sammanbinder de tre punkterna B, C och D kan ha. Ge dem en stund att upptäcka att om någon av dem är blå bildas en triangel upp mot

A. Om alla är röda får vi en triangel med hörn i B, C och D. Hur vi än vänder och vrider på måste det alltså finnas en enfärgad triangel.

Sammanfatta vad detta betyder: I detta spel då man försöker undvika enfärgade trianglar så ser vi att man inte kan hitta någon lösning för kompletta grafer med 6 punkter, men att det gick bra att undvika enfärgade trianglar i grafer med 4 och 5 hörn. Man skriver att R(3)=6 där R står för Ramsey talet, 3 står för trianglar (komplett graf med 3 punkter) och 6 var det minsta antal punkter som krävdes för att spelet inte skulle ha någon lösning.

Elaborate (5 minuter)

Låt oss nu titta på R(4) dvs när man vill undvika enfärgade kompletta grafer av med 4 punkter.



Be eleverna titta på sina färgningar av grafer med 6 noder och se om de gjort någon färgning som undviker enfärgade kompletta grafer med 4 punkter. (Antagligen är alla deras färgningar sådana.) Då vet vi att R(4)>6.

Man kan se att R(4)> 17 genom att tänka att varje nod sammanbinds med röda kanter med sin första, andra och fjärde granne både till höger och till vänster, samt med blå kanter med sin tredje, femte, sjunde och åttonde granne till höger och vänster. Då uppstår inga enfärgade kompletta graf med fyra punkter.

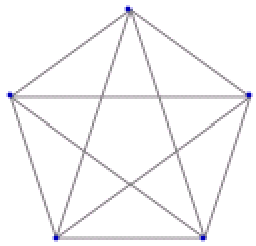
Bild:

Det visar sig att R(4)=18. Nu finns det 153 kanter att färga (hur ser man det?) vilket innebär att det finns 2^{153} olika färgningar (bortsett från symmetri). Även om man antog att man hade en extremt snabb dator på 1 teraflops som dessutom kunde göra det orimliga att göra en hel färgning av en graf i en enda operation så skulle det krävas $2^{153}/10^{12} \approx 10^{46}/10^{12} \approx 10^{36}$ sekunder, vilket är en triljon gånger mer än universums uppskattade ålder. Det krävs alltså ett smartare argument. För den intresserade kan vi hänvisa till följande webbsida

http://www.cut-the-knot.org/arithmetic/combinatorics/Ramsey44.shtml

där de genomför ett argument för att R(4)=18 med hjälp av de generaliserade Ramsey tal R(a,b).

Då skall vi slutligen fundera på R(5). Hur många hörn måste jag ha för att man vid en 2-färgning av den kompletta grafen inte skall kunna undvika enfärgade kompletta grafer med 5 hörn?



Vad tror eleverna? Det är ju mer än 17 (eftersom vi tom kunde undvika enfärgade kompletta grafer med fyra hörn då). Här gäller det att skapa en situation så att eleverna bli fascinerade av att höra att detta är en öppen fråga. Ingen vet! Vad man är så här långt är en övre och undre begränsning, dvs man vet att R(5) ligger mellan 43 ooch 49, men ingen vet det korrekte värdet.

Evaluate

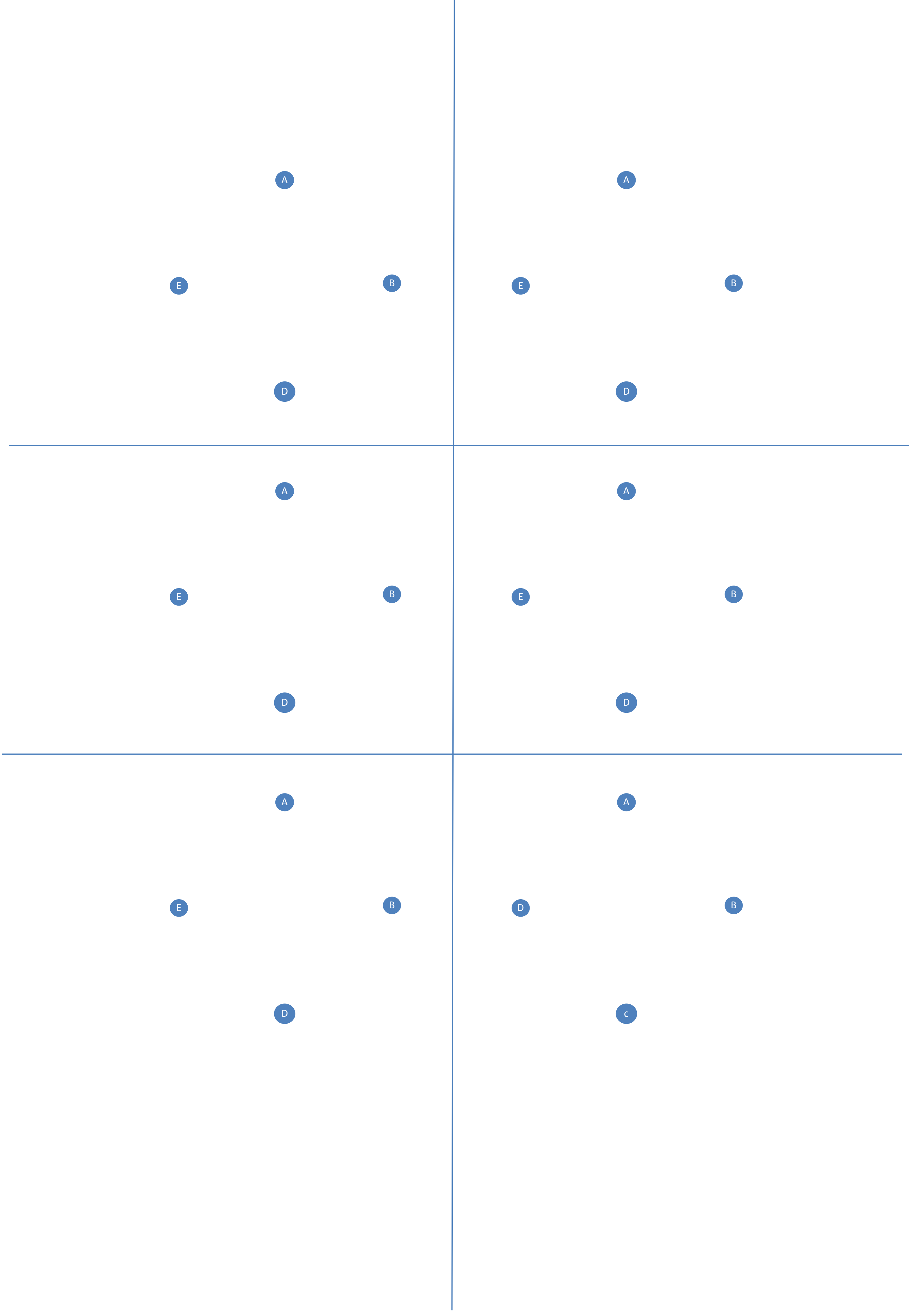
Vad har har vi lärt oss idag? Låt eleverna svara på detta. Som lärare kan du välja att fylla på med något av nedanstående:

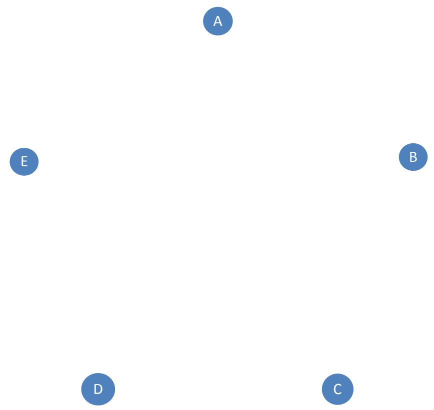
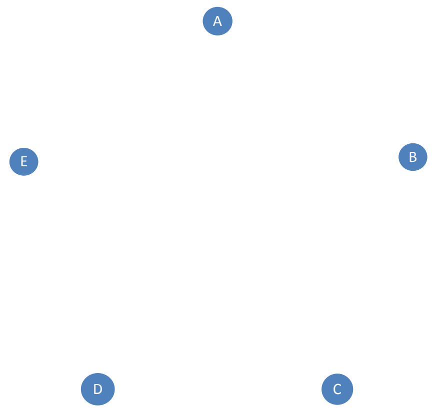
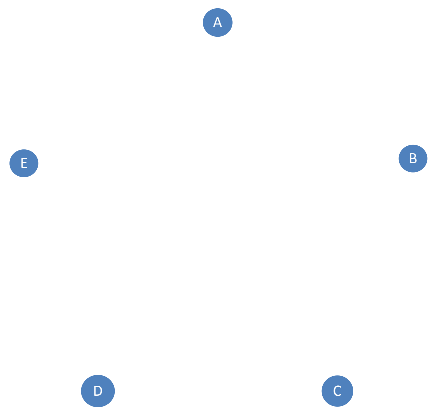
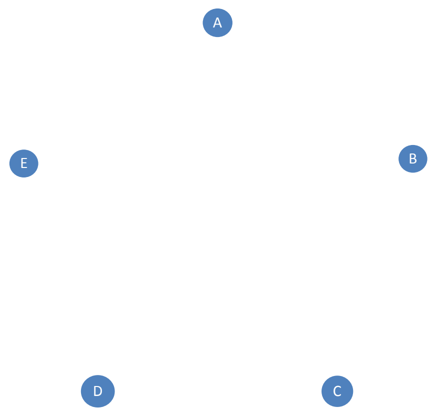
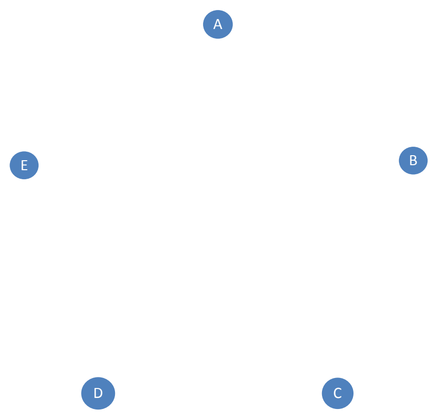
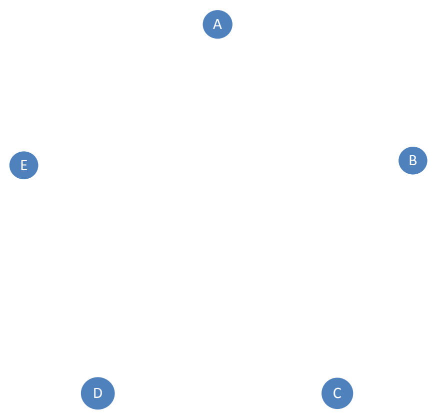
Som elev kan man få föreställningen att matematiken är ”färdig” och nu handlar det om att nya generationer skall lära sig den och hitta nya sätt att använda den. Faktum är att matematiken utvecklas med en allt ökande hastighet. Varje år skrivs det ca 35000 artiklar i matematik, dvs man gör ca 35000 nya framsteg, små som stora, i matematik. Idag har vi tittat på ett problem som delvis väntar på sin lösning. Vad är R(5)? Vi har tittat på ett problem som trots att det kan förstås av den som inte är matematiker kan förstå, ännu gäckar världens matematikexperter.

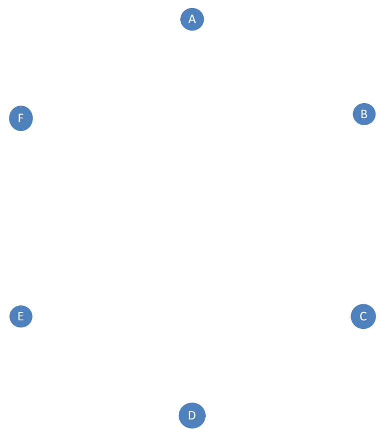
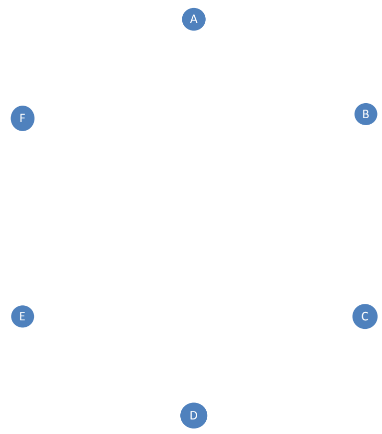
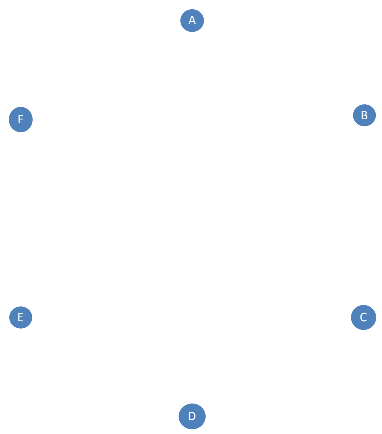
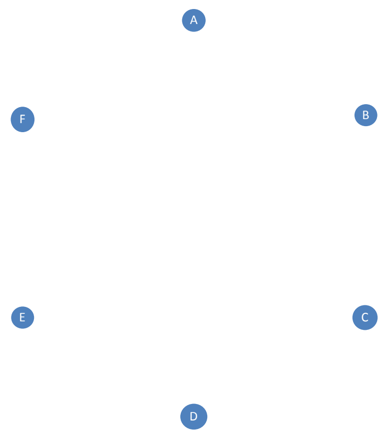
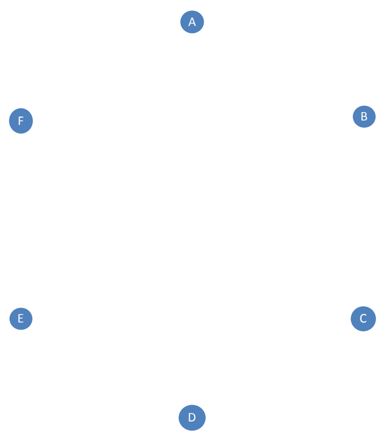
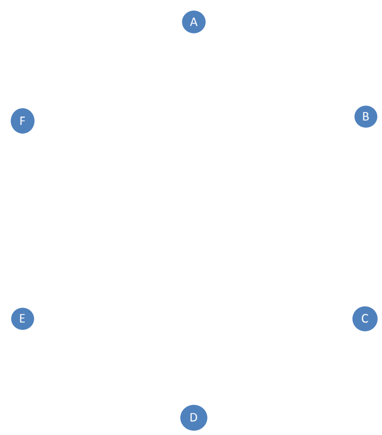
Men Ramseytalen är inte bara en fascinerande del av nutida matematik. De har också en viss koppling till verkliga situationer. På 50-talet märkte den ungerske sociologen Sandos Szalai att bland ca 20 personer fanns det antingen fyra studenter så att antingen kända alla alla, eller så kände ingen ingen. Han var frestad att dra sociologiska slutsatser från detta men insåg att det nog snarare var ett matematiskt fenomen. Han kontaktade därför den kände matematikern Paul Erdös. Kommer en grupp med ca 20 personer alltid innehålla 4 personer där antingen alla känner alla, eller ingen känner ingen?

Tänk dig bara att de 18 personerna är punkterna i en graf och att vi 2-färgar den med röd om de känner varandra och blå om de inte känner varandra. Då R(4)=18 vet vi att denna 2-färgningn måste innehålla en komplett graf med 4 punkter, vilket motsvara just fyra personer som antingen alla känner varandra (bara röda kanter) eller ingen känner ingen (bara blå kanter).

En annan möjlig tillämpning är att tänka på en fotbollsserie med 18 lag. Om lagen motsvarar noderna. Tänk dig att du vid ett givet tillfälle färgar alla kanter i den kompletta grafen så att kanten mellan två lag är blå om lagen inte möts i serien än, och röd om lagen redan möts. Då ser vi att ur långt eller kort vi än kommit in i serien så finns det alltid fyra lag som alla mött alla, eller fyra lag som ingen mött ingen.


A
E
B
D
A
E
B
D
A
E
B
D
A
E
B
D
A
E
B
D
A
D
B
c


A
E
B
D
C

A
E
B
D
C

A
E
B
D
C

A
E
B
D
C

A
E
B
D
C

A
E
B
D
C


A
F
B
E
C
D

A
F
B
E
C
D

A
F
B
E
C
D

A
F
B
E
C
D

A
F
B
E
C
D

A
F
B
E
C
D