Kleindagarna, IML, Stockholm, 15 – 17 juni 2012
Geometri

Cirklar, kordor och tangenter, vinklar . . . och annat

Jana Madjarova, MV, Chalmers/GU

Det kan ofta vara intressant att veta om två sträckor är lika långa, eller om två vinklar är lika stora. För att bevisa likhet mellan sträckor och/eller vinklar kan man t.ex. använda sig av kongruens eller likformighet. Men, det visar sig att man får mycket "gratis" om det finns en cirkel inblandad! Årets tema är inskrivna och omskrivna vinklar och månghörningar.

Alltså, givet är en cirkel.

Definition 1. En *cirkel* är mängden av alla punkter i planet som befinner sig på ett givet avstånd (cirkelns *radie*) från en given punkt (cirkelns *madelpunkt* eller *centrum*).

Notera att cirkeln är en kurva. Vill man istället referera till den plana figur vars rand är en cirkel, talar om man om en *cirkelskiva*. Ordet radie används såväl för sträckorna mellan medelpunkten och punkterna på cirkeln som för deras gemensamma längd. Varje cirkel är en s.k. enkel sluten kurva som delar planet i en inre och en yttre del (i förhållande till cirkeln).

Definition 2. *Korda* till en cirkel kallas en sträcka som har båda sina ändpunkter på cirkeln.

Definition 3. *Tangent* till en cirkel kallas en rät linje som har exakt en punkt gemensam med cirkeln.

Vi ska först formulera några mer eller mindre "uppenbara" påståenden om cirklar och deras eventuella gemensamma punkter med räta linjer.

Sats 1. En cirkelskiva är en konvex mängd.

Sats 2. En cirkel och en rät linje kan inte ha fler än två gemensamma punkter.

Sats 3. Givet en cirkel och en rät linje som har punkten T gemensam gäller att linjen är tangent till cirkeln om och endast om den är vinkelrät mot radien i T.

"Om och endast om" (omm) ovan betyder att det egentligen handlar om två satser: ur det första påståendet följer det andra och omvänt. Man kan också säga att påståendena är ekvivalenta, eller att det ena är sant exakt när det andra är sant.

Sats 4. De två tangenterna till en cirkel från en punkt utanför cirkeln är lika långa (d.v.s. sträckorna från den punkten till respektive tangeringspunkt är lika långa).

Bevisidé. Använd basvinkelsatsen och dess omvändning.

Definition 4. En vinkel med spets i cirkelns medelpunkt kallas för *medelpunktsvinkel.*

Definition 5. En vinkel med spets på cirkeln och axlar inuti cirkeln kallas för *randvinkel* (eller *periferivinkel, bågvinkel*).

Sats 5. (Randvinkelsatsen) En randvinkel på en cirkelbåge är hälften så stor som medelpunktsvinkeln som står på samma cirkelbåge.

Följdsats. Alla randvinklar som står på en och samma båge är lika stora.

Bevis (skiss; OBS! kräver att man kan basvinkelsatsen och yttervinkelsatsen). Betrakta först en randvinkel vars ena axel går genom medelpunkten; använd basvinkelsatsen och yttervinkelsatsen för att visa påståendet. För en godtycklig randvinkel får man resultatet genom addition eller subtraktion av två vinklar av ovanstående specialtyp.

Sats 6. (Korda-tangentsatsen) Vinkeln mellan tangenten till en cirkel och en korda genom tangeringspunkten är lika med randvinkeln på bågen mellan kordans båda ändpunkter, med spets på andra sidan kordan (gentemot tangenten).

Bevisidé. Försök hitta ett sätt att hantera beviset som liknar beviset av randvinkelsatsen.

Att diskutera:

(1) Är alla fyrhörningar in- resp. omskrivna?

(2) Kan du karakterisera alla in- resp. omskrivna fyrhörningar?

(3) Hur stor är en randvinkel som står på en halvcirkel? Följer det direkt ur beviset av randvinkelsatsen?

(4) En rätvinklig triangel har hypotenusa med längden 8 cm och höjd mot hypotenusan med längden 5 cm. Hur stor är triangelns area?

(5) En rätvinklig triangel har kateter med längderna a och b och hypotenusa med längden c. Hur lång är medianen mot hypotenusan? (*Median* kallas sträckan som sammanbibder ett hörn i triangeln med motstående sidas mittpunkt.)

(6) I en triangel med sidlängderna a, b, c ($|BC| = a$, etc) har medianen mot sidan AB längden $\frac{c}{2}$. Kan man bestämma hur stor vinkeln är vid hörnet C?

Mer att diskutera:

(7) Vad betyder det att sträckor är lika långa? Vad är längd?

(8) Vad betyder det att vinklar är lika stora? Vad är vinkelstorlek?

(9) Hur mäter man sträckor och vinklar? Vad finns det för enheter man kan mäta dem i? Vad ser du för för- och nackdelar med de olika enheterna? Kan du se någon principiell skillnad mellan mätning av sträckor och mätning av vinklar?

(10) Vad är en sträcka? Vad är en vinkel?

(11) Vad betyder "på samma sida som/på andra sidan"?

(12) Är omvändningarna till satserna ovan sanna? Om ja, hur kan man bevisa dem? Om nej, varför inte?

(13) Vad är omvändningen till en sats? Hur låter Pythagoras' sats och dess omvändning?

(14) En triangel har sidlängderna 3, 4, och 5 längdenheter. Kan man dra slutsatsen att det är en rätvinklig triangel? Om ja, vilken sats ska man hänvisa till?

Mer roligt och nyttigt att titta på:

(15) “Power of a point”.

(16) Ptolemaios' sats.

(17) Pascals sats.

(18) Niopunktscirkeln (Feuerbachs cirkel, Eulers cirkel).

Vilket / vilka av bevisen nedan behöver kompletteras, och hur?

Problem. Givet är en spetsig triangel. På två av dess sidor ritas cirklar med dessa sidor som diametrar. Visa att de två cirklarnas (andra) skärningspunkt ligger på triangelns tredje sida.

Bevis 1. Antag att cirklarnas diametrar är sidorna BC och CA. Låt P vara de två cirklarnas (andra) skärningspunkt. Av randvinkelsatsen följer att $\angle APC = \angle BPC = 90^\circ$, vilket ger att $\angle APB = 180^\circ$, d.v.s. P ligger på sidan AB.

Bevis 2. Antag att cirklarnas diametrar är sidorna BC och CA. Låt P vara punkten i vilken en av cirklarna, säg den med diameter CA, skär sidan AB. Enligt randvinkelsatsen är då $\angle APC$ rät. Det följer att $\angle BPC$ också är rät, vilket betyder att P måste ligga på den andra cirkeln också.

Bevis 3. Antag att cirklarnas diametrar är sidorna BC och CA. Låt P vara fotpunkten till höjden från C (d.v.s. $P \in AB$). Då är vinklarna $\angle APC$ och $\angle BPC$ räta, vilket innebär att P måste ligga på båda cirklarna (enligt ?).

Fråga. Vad händer om triangeln inte är spetsig?

Rymdproblem. En tetraeder är sådan att om man klipper upp den längs kanterna som utgår från ett av dess hörn och viker ner sidorna, så får man en kvadrat med sidlängd a. Beräkna tetraederns volym.

Problemlösningsstrategier

Kan du identifiera några problemlösningsstrategier som används i bevisen och i problemens lösningar?