



# KLEIN- DAGARNA

Sfärisk geometri -  
vinkelsumma

KLEINMATERIAL

Augusti 2017

SPONSORER:



SVENSKA NATIONALKOMMITTÉN  
FÖR MATEMATIK

SKM

SVENSKA KOMMITTÉN FÖR  
MATEMATIKUTBILDNING



INSTITUT  
MITTAG-LEFFLER

THE ROYAL SWEDISH ACADEMY OF SCIENCES

FINANSIÄR:



BRUMMER & PARTNERS

# KORT OM KLEINMETODEN

Denna lektion har utformats enligt Kleinmetoden, där vi har kombinerat gymnasielärares pedagogiska expertis med högskolematematikens fördjupade ämnes-kunskaper. Under Kleindagarna gör vi det genom att arbeta enligt följande modell →

Lektionen bygger på utbildningsmodellen 5E som bygger på fem olika steg: engage, explore, explain, elaborate, evaluate.

Tanken är att en givande lektion börjar med ett inslag som engagerar eleverna, så att de blir nyfikna och vill fortsätta upptäcka ämnet genom någon form av aktivitet. Sen är det dags att förklara det som hänt. Efter detta följer en fördjupning av ämnet där eleverna får möjlighet att utmana och utveckla sina kunskaper genom ytterligare erfarenheter, för att sen gå tillbaka och utvärdera det de lärt sig.

## PROCESS UNDER FÖRSTA KLEINDAGEN



## SISTA KLEINDAGEN



Diskussion av lektioner i grupp

## EFTER KLEIN- DAGARNA



Lektion genomförs i klassrum  
och dokumenteras



# KLEINMATERIAL: Benfords lag

LEKTIONSTEMA:

KLEINÅRET:

2017

OM MATERIALET:

LEKTIONEN HAR  
INSPIRERATS AV:

Elin Götmark

LEKTIONSPILOT:

Samuel Bengmark

ANSVARIG  
KLEINPERSON:

Samuel Bengmark

TILLSAMMANS  
MED:

Javier, Linda, Charlotta, Erik, Teresa, Fredrik



# FÖRBEREDELSE

INNAN LEKTIONEN:

MATERIAL:

Världskartor (se bilaga),  
Jordglober (eventuellt badbollar med jorden som motiv).  
Snören att skapa storcirklar, eller delar av.  
Linjaler, gradskivor

TIDSÅTGÅNG:

SVÅRIGHETSGRAD:

LÄMPLIG FÖR:

Ma1, förslagsvis i samband med vinkelsumman för trianglar i planet.

NYCKELORD:



# KLEINMATERIAL: Sfärisk geometri - vinkelsumma

## Engage - karta

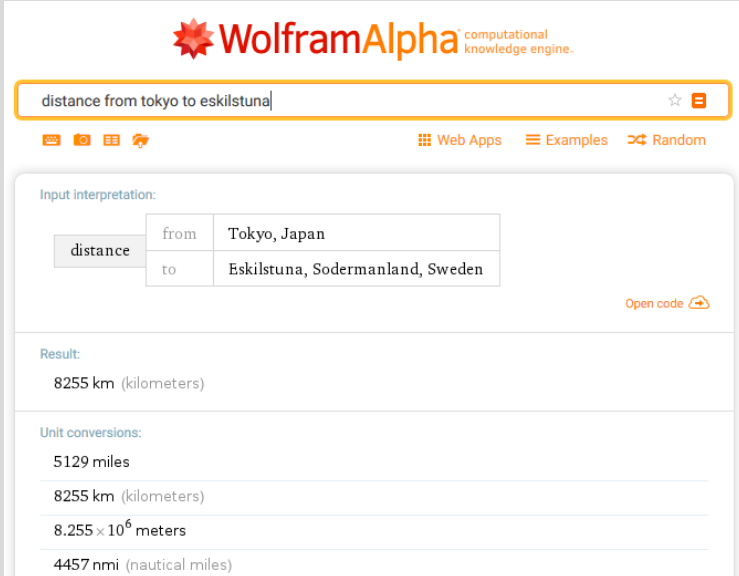
I grupper om två får de karta som läraren tryckt upp. Läraren tar med linjaler.

*Hur långt är det mellan din ort och Tokyo. Rita och mät. Tips: Jordens omkrets är 4000 mil. (5 min.)*

**Gemensam diskussion:** *Hur har det gått? Vilka värden har ni fått.*

**Läraren visar:** Rätta avståndet wolframalpha.com

**Diskussion:** *Vilka problem ser ni? Är färdvägen den närmaste? Är längdmåttet samma över hela kartan? (Avståndet runt ekvatorn är längre än en latitudcirkelarna är kortare närmare nordpolen men ser lika långa på kartan.)*



The screenshot shows the WolframAlpha interface. The search bar contains the text "distance from tokyo to eskilstuna". Below the search bar, there are navigation icons and links for "Web Apps", "Examples", and "Random". The "Input interpretation" section shows a table with the following data:

	from	to
distance	Tokyo, Japan	Eskilstuna, Sodermanland, Sweden

Below the table, there is a "Result:" section showing "8255 km (kilometers)". Underneath, the "Unit conversions:" section lists several units: "5129 miles", "8255 km (kilometers)", "8.255 × 10<sup>6</sup> meters", and "4457 nmi (nautical miles)".



# KLEINMATERIAL: Sfärisk geometri - vinkelsumma

## Engage - jordglob

Grupperna får om fyra får de jordglob. Snöre och linjal. Svara på samma fråga: *Hur långt är det mellan din ort och Tokyo. Rita och mät. Tips: Jordens omkrets är 4000 mil. (5 min.)*

**Gemensam diskussion:** *Hur har det gått? Vilka värden har ni fått?*

**Diskussion:** Varför blev det bättre ilka problem ser ni? Är färdvägen den närmaste? Är längdmåttet samma över hela kartan?

*Rita ut färdvägen från kartan på jordgloben och tvärt om. (5 min)*

**Diskutera resultatet:** Se tex att på kartan ser närmaste vägen inte ut som ett rakt sträck. Vi skall återkomma till detta med kartprojektioner senare.

På jordgloben ser det som nu tycker var närmaste. Observera det den faktisk var en omväg.

**Historia:** Man har genom historien kämpat med att skapa projektioner som är rättvisande och som passar för olika syfte. Vilja bevara avstånd, riktning, area. Inte möjligt att bevara alla tre i en plan karta. SE DET?



# KLEINMATERIAL: Sfärisk geometri - vinkelsumma

## Explain - storcirklar

Nu skall vi övertyga studenten om att storcirklar ger geodeter, dvs närmaste vägen.

Titta på

- Nära nordpolen!
- Längs ekvatorn!
- Jämför sträckan som man färdas längs en storcirkel och en småcirkel. Kräver två ringar som läggs i samma plan.

Geodeter: En rät linje i planet är närmste vägen mellan två punkter. Nu är närmaste vägen given av storcirklar. Storcirklar motsvara alltså räta linjer i planet.



# KLEINMATERIAL: Sfärisk geometri - vinkelsumma

## Explore – trianglar och vinkelsumma

Rita tre punkter på sfären. Bilda triangeln med dessa tre punkter som hörn. Använd vinkelskiva för att mäta vinklar och beräkna vinkelsumman. Gör minst tre olika trianglar.

Sammanställs på tavlan!

Diskussion: Har vi mätt fel? Vad är det som händer? Vad borde det vara? Vem har rätt?





# KLEINMATERIAL: Sfärisk geometri - vinkelsumma

## Explain – vinkelsumman ej konstant

Ta upp geogebra och visa på tavlan att summan blir mer än 180 grader? Kolla speciellt på två orter på ekvatorn och nordpolen som har vinkelsumman  $90+90+90$ .

<https://www.geogebra.org/m/M6nqFGmZ>

Är detta förbluffande? Kolla på beviset för att vinkelsumman är 180 i planet. Kan man inte återanvända den bevisidén? Har inte parallella linjer.



# KLEINMATERIAL: Sfärisk geometri - vinkelsumma

## Elaborate

Mellan vilka värden kan vinkelsumman variera.

Vad är parallella linjer.

Kan du skapa en yta instängd av bara två "räta injer". (Biangel)

Hur anger man en koordinat för en plats på jorden?



# KLEINMATERIAL: Bilagor

## Referenser

[Kan tex hänvisa till artiklar eller till filer som läggs upp på SKMs webbsida]



# VAD ÄR KLEIN- DAGARNA?

**Kleindagarna** är ett initiativ som sammanför matematiklärare från gymnasiet med professorer och högskolelärare i matematik på det världsledande Institut Mittag-Leffler i Stockholm. Syftet är att låta deltagarna inspirera och lära av varandra och att de tillsammans ska få möjlighet att utveckla framtidens matematiklektioner.

Kleindagarna har arrangerats varje år sedan 2011 och är ett gemensamt initiativ av *Svenska Kommittén för Matematikundervisning (SKM)*, *Svenska Nationalkommittén för Matematik (KVA)*, *Institut Mittag-Leffler* och finansieras av *Brummer & Partners*.



**Skulle du vilja delta i nästa omgång av Kleindagarna?**

Besök <http://skm.kva.se/>  
eller [följ oss på Facebook!](#)

# NÅGRA RÖSTER OM KLEINDAGARNA



**Birgitta Nilsson** deltog i Kleindagarna 2014 och har sen dess låtit sin undervisning inspireras av akademien.

*Varför är dagarna så betydelsefulla?*  
Kopplingen mellan forskning och gymnasiet är viktigt. Det här utbytet – det kollegiala lärandet – gav mig otroligt mycket inspiration.

*Hur har Kleindagarna utvecklat dig som lärare?*  
Professorerna på Kleindagarna hade bland annat 5E-modell för lektionsplanering som de presenterade, och som Kleinlektionerna bygger på och den har jag haft mycket nytta av. Kleindagarna erbjuder lärare den här typen av saker, att ta del av det senaste inom sin egen bransch. Det har gjort att jag idag söker efter aktuell forskning på ett helt annat sätt. Vad är det senaste inom matematiken? Det här gällde inte bara själva ämnet matematik i sig, utan också sättet att lära ut. Jag fick enorm energi av att delta och kom hem med massor av nya idéer och inspiration.

**Torbjörn Jansson**, mattelärare på Tullängsgymnasiet i Örebro som deltog i Kleindagarna 2011.

*Vad är Kleindagarna för dig?*  
Kleindagarna var ett tillfälle att samla både lärare från gymnasiet och universitet för att mötas och tillsammans hjälpas åt att ta fram framtidens matematikundervisning. Kleindagarna gav en chans att träffa likasinnade under flera dagar och det finns en styrka i att det sker i så litet format. När jag deltog var vi drygt 30 personer totalt, vilket gjorde det lätt att lära känna varandra,

*Hur har Kleindagarna utvecklat dig som lärare?*  
Att träffa andra som tänker i samma banor gav extra motivation. Dessutom har de lektioner som vi tillsammans tog fram varit till stor nytta i klassrummet. De är ämnade att fungera som introduktionslektioner när man introducerar en ny del av matematiken. Tanken är att de ska inspirera och engagera eleverna. För mig har det fungerat väldigt bra.



**Monica Göransson Löof** är gymnasielärare i matematik och företagsekonomi på Hjalmar Strömerskolan i Strömsund. Monica deltog i Kleindagarna 2014.

*Vad är Kleindagarna för dig?*  
På Kleindagarna får man dels lära sig något nytt kunskapsmässigt, dels erbjuds metoder för lektionsupplägg. Man gav alltså både idéer för fylla undervisningen med, men också för hur man undervisar. Sedan några år har man ju via GY11 (gymnasiereform) lagt till att man ska träna eleverna på moment som problemlösning, modellering och så vidare. Kleindagarna gav mig många bra idéer på hur jag skulle kunna göra det rent praktiskt.

*Under Kleindagarna möts lärare från gymnasiet respektive akademien – vad har ni lärt er av varandra?*  
Kleindagarna erbjuder en bra glimt av varandras världar. Det ger i sin tur inspiration och näring. Sedan plockar man helt enkelt ut det som går att arbeta med i en gymnasieklass. När vi åt frukost, lunch och middag tillsammans så var vi ju en salig blandning människor. Vi var till att börja med lärare från många olika skolor. Sedan satt ju ofta även professorerna och doktoranderna med, och jag fick en känsla av att alla hade något slags utbyte med varandra.



# KAN DU INTE KOMMA TILL KLEINDAGARNA?

Låt Kleindagarna komma till dig genom  
att arrangera dina egna Kleindagar!

Är du intresserad av att arrangera lokala Kleindagar där du  
bor? Gör så här:

- Samla mattelärare från gymnasieskolor i din omgivning och boka en lämplig lokal – Tre dagar är önskvärt, men även kortare Kleindagar kan anordnas.
- Kontakta [kleindagarna@gmail.com](mailto:kleindagarna@gmail.com) så sätter vi dig i kontakt med företrädare för akademien och kan bistå med råd och tips inför dagarna.
- Tidigare års Kleinmaterial finns att tillgå på [www.kleindagarna.se](https://www.kleindagarna.se). Skicka gärna denna länk till de personer som ska delta så att de kan skapa sig en förståelse för hur Kleindagarna går till. Under konferensen kan ni använda dessa mallar för att sammanställa det lektionsmaterial som ni arbetat fram och skicka det till ovan mailadress – på detta sätt ser vi till att fler få ta del av framtidens mattelektioner.





## GILLADE DU DET HÄR MATERIALET?

På [Kleindagarnas hemsida](#) hittar du fler Kleinmaterial.  
Nya lektionsmaterial läggs upp löpande allt eftersom de färdigställs.

*Har du gjort ett eget material som du tror att andra hade haft nytta av?*  
Maila [kleindagarna@gmail.com](mailto:kleindagarna@gmail.com) så ser vi till att andra Klein-vänner  
också kan få tillgång till det via hemsidan!

